

Fuga da Algebraz

Irene Crispi e Francesco Iacca

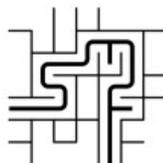
Settimana matematica fiorentina, 1-3 febbraio 2023

Pochi fortunati possono raccontare di Algebraz. Questo carcere, costruito in tempi ormai lontani, da sempre contiene i più efferati criminali, soggetti pericolosi che hanno recato un danno imperdonabile alla branca della matematica che più di tutte appassiona la direttrice del carcere, ovvero l'algebra. Le guardie di Algebraz, anch'esse amanti della matematica, sottopongono continuamente i poveri detenuti a prove, giochi, indovinelli (tutto a base di matematica), per passare un po' il tempo.

Problema 1. Al primo piano di Algebraz, Evariste, la guardia del primo settore, è alle prese con un gruppo di $2n$ studenti, colpevoli di aver bocciato il primo parziale di Algebra I: per questo crimine, di entità leggera, dovrebbero ricevere una settimana di reclusione. Evariste, però, decide di concedere loro un'altra opportunità: rinchiude uno studente da solo in isolamento, e mette gli altri $2n - 1$ in fila indiana, in modo che ognuno di loro possa vedere tutti e soli gli studenti davanti a lui. Successivamente, prende n cappelli neri e n cappelli bianchi, e ne mette in testa uno ad ogni studente. Fatto ciò, chiede se qualcuno dei condannati conosce con certezza il colore del cappello che ha in testa: se qualcuno lo sa, deve esclamarlo a voce alta, entro un minuto da quando i cappelli sono stati indossati. Ovviamente, hanno una sola possibilità: se lo studente che prova a rispondere sbaglia, o se nessuno risponde entro un minuto, la pena verrà raddoppiata. Che strategia possono usare gli studenti, per essere sicuri di vincere il gioco, e quindi di uscire immediatamente?

Problema 2. Sophus, incaricato di sorvegliare a vista n informatici pericolosi, decide di portarli in cortile per far prendere loro una boccata d'aria. In quel momento, alla guardia viene un'idea: decide di disporre gli n prigionieri in fila indiana (in modo che ognuno veda la testa di tutti quelli che ha davanti a sé), e di mettere, sulla testa di ognuno un cappello, o bianco o nero. Fatto ciò, chiede a ciascun condannato, partendo dall'ultimo della fila, di indovinare il colore del cappello che ha in testa: se almeno $n - 1$ prigionieri indovinano il colore del proprio cappello, tutti quanti verranno condonati, altrimenti saranno tutti obbligati a frequentare un corso di teoria dei gruppi. Prima di mettere i cappelli in testa ai prigionieri, Sophus concede loro di mettere in atto una strategia comune per cercare di uscire vincitori dalla prova. Che strategia possono usare gli informatici per essere certi di ottenere il condono?

Problema 3. Al secondo piano di Algebraz, ci sono n celle di isolamento: qui dentro sono rinchiusi ingegneri, statistici e tutti coloro che hanno provato ad applicare la matematica al mondo reale, e che dunque devono essere totalmente privati del contatto con l'esterno. Allo stesso piano, c'è una stanza comune, al cui interno c'è solamente una lampadina (che inizialmente è spenta) e un interruttore per accenderla e spegnerla. Tale stanza è invisibile dall'interno delle celle di isolamento. Felix, il guardiano del secondo piano, decide di fare un gioco: ogni



notte sceglie un prigioniero (lo stesso prigioniero può essere scelto più volte) e lo porta nella stanza. Qui, quest'ultimo può scegliere se lasciare la lampadina com'era prima, oppure premere l'interruttore, e dunque accenderla se era spenta, o viceversa. Il gioco finisce nel momento in cui un prigioniero, portato nella stanza comune, esclama che ogni prigioniero è stato nella stanza almeno una volta: se la sua asserzione è corretta, i prigionieri vengono tolti dall'isolamento, altrimenti continueranno a rimanere soli nelle celle del secondo piano. La notte prima dell'inizio del gioco, i prigionieri si ritrovano tutti insieme per cercare di formulare un piano. Qual è una possibile strategia che i detenuti del secondo piano possono attuare? (Per evitare situazioni di stallo, assumiamo che, se il gioco andasse avanti all'infinito, ogni prigioniero verrebbe chiamato infinite volte: questo vuol dire che non sono ammessi casi del tipo in cui viene chiamato sempre lo stesso prigioniero, e simili).

(★) **Problema 4.** Alla mensa di Algebraz, Emmy, la cuoca, decide di proporre agli n prigionieri lì presenti, un gioco veloce: dispone i detenuti in cerchio (in modo che ognuno veda tutti gli altri), prende dei cappelli di n colori diversi (per ogni colore, ci sono infiniti cappelli), e ne mette in testa uno ad ogni commensale, dopodiché conta fino a tre. Al tre, gli n prigionieri provano ad indovinare il colore del cappello che hanno in testa, esclamandolo in contemporanea. Se uno, e uno solo, indovina il colore del proprio cappello, allora tutti quanti mangeranno il menù destinato agli algebristi, altrimenti tutti senza cena! Prima di partire con il gioco, i commensali possono escogitare una strategia, che permette loro di vincere sempre: qual è?

(★) **Problema 5.** Albert e Nikola si sono macchiati del peccato più grande di tutti, cioè la fisica. Dopo la condanna, vengono accompagnati nelle loro celle di Algebraz: prima però la direttrice desidera vederli nel suo ufficio. Una volta arrivati, si trovano davanti una scacchiera classica, 8×8 , in cui sotto ogni casella c'è uno scompartimento segreto, e sopra ogni casella è posizionata una moneta, che può essere rivolta con la testa o con la croce verso l'alto (tutte le monete sono identiche). La direttrice inizia quindi a spiegare le regole del gioco: per prima cosa, chiederà ad Albert di lasciare la stanza, poi posizionerà un *anello* in uno degli scompartimenti segreti a sua scelta, e infine posizionerà le monete sopra le caselle nel modo che preferisce; a quel punto, Nikola dovrà girare una e una sola moneta, dopodiché lascerà la stanza. Infine, entrerà Albert, che guardando la disposizione delle monete, dovrà indovinare sotto quale casella si cela l'anello: se Albert darà la risposta corretta, allora saranno entrambi *liberi* immediatamente, altrimenti entrambi guadagneranno, oltre alla pena che hanno già, una settimana di lavoro forzato nei *campi* di Algebraz. Prima di iniziare il gioco, la direttrice permette ai due condannati di discutere una strategia, ma rigorosamente alla sua presenza. Esiste una strategia che permette ad Albert e a Nikola di uscire vincitori dal gioco? Se sì, qual è?

I problemi contrassegnati da (★) sono quelli di difficoltà maggiore.