UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE
DIMAI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "ULISSE DINI"

_settimana matematica fiorentina

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

Testo degli Esercizi

delle lezioni dei docenti:

Orazio Puglisi, Carlo Toffalori, Antonio Giovinetto, Graziano Gentili, Francesco Fumagalli, Samuele Antonini, Andrea Colesanti.

A cura degli studenti tutor:
Irene Crispi, Giovanni De Carolis, Monica Graneroli, Francesco Iacca.

Esercizi 1 febbraio 2023

Orazio Puglisi, **Protocolli a conoscenza zero:**

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e si definisca

$$D(a, b) = \{x \mid x|a \text{ e } x|b\}$$

l'insieme dei divisori comuni ad a e b. Dimostrare che, se $a = bq + r$ con $q, r \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, allora $D(a, b) = D(b, r)$.

Esercizio 2. Siano $n \geq 2$ un numero naturale é $a \in \mathbb{Z}$. Se $[a] \in \mathbb{Z}_n$ e invertibile, dimostrare che esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $1 = ax + ny$.

Esercizio 3. Siano p un numero primo ed $x \in \mathbb{Z}_p$ un quadrato. Dimostrare che, se $p = 4k + 3$ allora, posto $p - 1 = 2s$ (ovvero $s = 2k + 1$), abbiamo che $r = x^{\frac{s+1}{2}}$ é una radice quadrata di x.

Esercizio 4. Sia p un primo della forma $p = 4k + 3$. Dimostrare che $[-1] \in \mathbb{Z}_p$ non é mai un quadrato. Cosa succede se p é della forma $p = 4k + 1$?

Esercizio 1. Chi tra A e B ha una strategia vincente nei giochi diofantei delle seguenti equazioni?

(a) $2x_1 + 4y_1 = 11$,

(b) $2y_1 + 4y_2 = 11$,

(c) $2x_1 + 4y_1 = 12$,

(d) $2y_1 + 4y_2 = 12$,

(e) $(x_1 + 1)^2 - x_1^2 = 2y_1 + 1$,

(f) $(x_1 + 2)^2 - x_1^2 = 2y_1 + 1$.

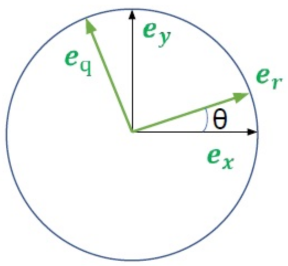
Esercizio 2. L'equazione $9x_1 + 6y_1 = 3$ ha soluzioni intere? Se sí, quali? E quali soluzioni ha tra i numeri naturali?

Esercizi 2 febbraio 2023

Antonio Giovinetto, **La matematica come interpretazione della natura:**

Esercizio 1. Una valanga di neve scende a valle dalla sommitá di un monte lungo un pendio ghiacciato. Dopo 100 m di dislivello incontra un pianoro lungo 200 m con attrito stimato pari a $\mu_1 = 0.35$. Dovo aver descritto dettagliatamente la modellazione del fenomeno e la sua dinamica, trovare la velocitá della valanga alla fine del pendio e spiegare cosa succede alla fine del tratto piano. Qualora la valanga non si fosse arrestara come posso fermarla in un successivo tratto piano di 100 m?

Esercizio 2. Trovare la coppia di versori "fissi" (e_x, e_y) in funzione della coppia di versori rotante (e_r, e_q) e viceversa.



Esercizio 3. In molti casi la descrizione dei fenomeni fisici é governata dalle cosiddette equazioni differenziali ordinarie (EDO) la cui soluzione é a volte possibile analiticamente. Tuttavia per definire la soluzione univocamente occorre fissare delle costanti tramite le soluzioni di sistemi lineari. Supponiamo ad esempio di avere la funzione $y = y(x)$, una EDO possibile é

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = 0, \quad \left(\text{con } x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right).$$

La soluzione generale é:

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x),$$

con A e B costanti da determinare. Le costanti possono essere ricavate conoscendo, ad esempio, il valore che $y(x)$ assume agli estremi:

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.$$

Trovare le costanti A e B e scrivere la soluzione. E se le condizioni fossero $y(0) = 2$ e $\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$?

Esercizio 1. Si approssimi la terra ad una sfera S, avente raggio uguale al raggio medio della terra. Si considerino ora i punti P della sfera S con la seguente proprietá: *Un viaggiatore parte del punto P della sfera S e percorre x km verso Sud. Poi percorre y km verso Est e x km verso Nord, e si trova di nuovo nel punto P da cui era partito.*

(a) Si determini il luogo dei punti P di S aventi la proprietá richiesta nel caso in cui x é 1 km e y é 1 km.

(b) Si determini il luogo dei punti P di S aventi la proprietá richiesta nel caso in cui x é 1 km e y é 60 km.

(c) Si descriva il luogo dei punti P di S al variare delle lunghezze x e y.

Esercizio 2. Si consideri un piano π e un cerchio γ su questo piano. Sia A un punto fuori dal piano π, sia dall'asse del cerchio γ. Il cono Γ passante per γ e avente vertice in A si dice cono obliquo passante per γ e con vertice in A.

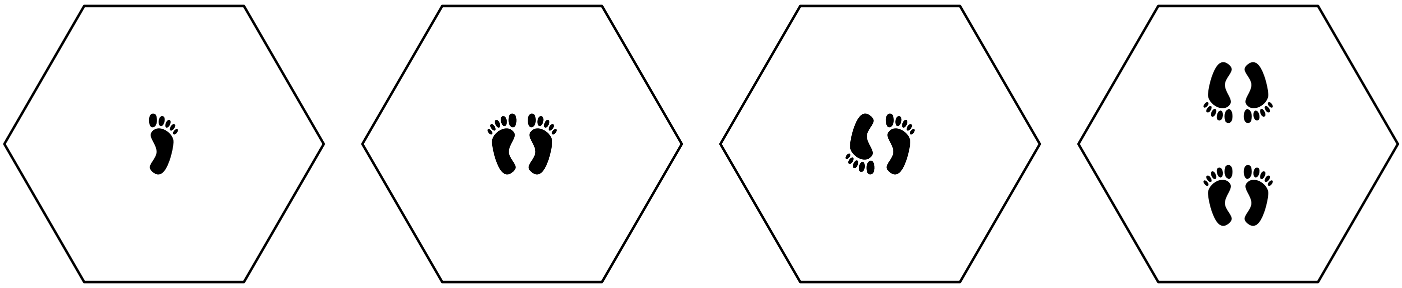
(a) Si provi che tutti i piani paralleli a π intersecano il cono Γ lungo cerchi.

(b) Si provi che esiste esattamente un'altra famiglia di piani paralleli, che non contiene π, i cui elementi intersecano Γ lungo cerchi. Si determini questa famiglia.

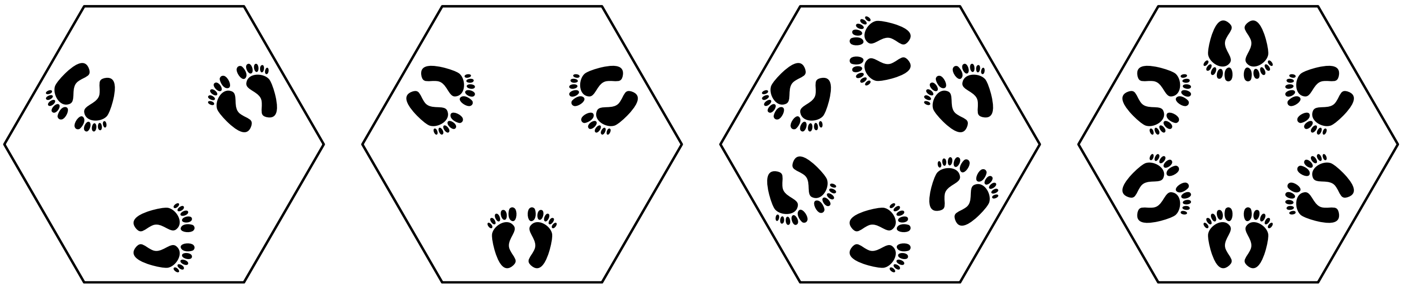
Esercizi 3 febbraio 2023

Francesco Fumagalli, **M.C. Escher e l'arte di catturare l'infinito:**

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti figure individuare tutti i movimenti rigidi (o simmetrie) dell'esagono regolare che lasciano inalterata l'immagine.



0 $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{D}_2$



$\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{D}_3$ $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{D}_6$

Esercizio 2. Calcolare i valori delle seguenti frazioni continue.

(a) $$[1,1,1,1,1,\dots] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

(b) $$[1,2,2,2,2,\dots] = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

Esercizio 1. In una città ci sono infiniti hotel, ognuno dei quali con infinite camere. In ogni camera soggiornano due persone e in nessun hotel ci sono stanze libere. Un giorno, tutti gli hotel tranne uno sono costretti a chiudere per lavori di ristrutturazione e ognuno degli ospiti rimasti senza alloggio cerca di prenotare una camera tutta per sé nell'unico hotel aperto. A questo punto, anche gli ospiti già presenti in questo hotel pretendono una camera ad uso singolo. Sarà possibile accontentare tutti? In che modo?

Esercizio 2. Sia A un insieme finito e sia B un insieme infinito (non necessariamente numerabile) tale che $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che la cardinalità di $A \cup B$ è uguale alla cardinalità di B. (Suggerimento: si può utilizzare il fatto che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile).

Esercizio 3. Come nell'esercizio 2 con A insieme numerabile e B insieme infinito (non necessariamente numerabile) tale che $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che la cardinalità di $A \cup B$ è uguale alla cardinalità di B. (Suggerimento: si può utilizzare il fatto che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile).

Esercizio 4. Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 5. Dimostrare che l'insieme delle successioni di numeri naturali non è numerabile (suggerimento: se fosse numerabile potremmo elencare le infinite successioni e poi utilizzare il procedimento diagonale...).

Esercizio 1. Dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale, ovvero dimostrare che non esiste nessun numero razionale r tale che $r^2 = 3$. Più in generale, dimostrare che se p è un numero primo, $\sqrt{p}$ è irrazionale.

Esercizio 2. A quale frazione corrisponde il numero decimale:

$$8,5\overline{7}?$$

Esercizio 3. Il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots & & \\
 & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & &
\end{array}$$

è alla base della dimostrazione (dovuta a Cantor) del fatto che l'insieme delle frazioni (positive, per semplicità) è numerabile, ovvero che esiste una corrispondenza biunivoca tra questo insieme e l'insieme dei numeri naturali. Quale numero naturale n viene associato alla frazione positiva $\frac{115}{99}$ in questa corrispondenza? Più in generale, quale numero naturale n viene associato alla frazione $\frac{p}{q}$, per p e q generici?

Esercizio 4. Gli irrazionali quadratici sono i numeri della forma

$$r + q\sqrt{n}$$

dove r e q sono numeri razionali, e n è un numero naturale. L'insieme dei numeri irrazionali quadratici è numerabile?