_settimana matematica fiorentina

Quarta edizione

1 - 3 Febbraio 2022

Esercizi e cenni di soluzioni

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

DIMAI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "ULISSE DINI"

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

Indice

Introduzione

Questo libretto raccoglie gli esercizi e le relative soluzioni proposti nel corso della quarta edizione della Settimana Matematica Fiorentina, che si è tenuta dall'1 al 3 febbraio 2022. Gli esercizi sono volutamente separati dalle relative soluzioni per incoraggiare il lettore a risolverli autonomamente, senza cedere alla tentazione di leggere subito la soluzione suggerita.

Spesso le soluzioni non sono dettagliate e talvolta neppure complete: invitiamo pertanto il lettore a completarle integrando e giustificando i passaggi mancanti, come utile allenamento per acquisire familiarità con questo tipo di esercizi. Le difficoltà, anche notevoli, che si possono incontrare nello svolgimento degli esercizi non devono essere motivo di scoraggiamento ma uno stimolo all'approfondimento delle conoscenze e alla riflessione sulle proprie strategie risolutive. Per risolvere questi esercizi non c'è alcun limite di tempo ed è possibile risolverne anche solo una parte, rimandando a un momento futuro la soluzione completa.

Gli esercizi sono presentati secondo l'ordine delle lezioni e dei seminari che si sono tenuti durante la Settimana Matematica Fiorentina.

Vi invitiamo a segnalare eventuali sviste ed errori, e che dire? Buon lavoro!

Lo Staff

Capitolo 1

Esercizi

1.1 A lezione d'infinito - prof. Samuele Antonini

Esercizio 1. In una città ci sono infiniti hotel, ognuno dei quali con infinite camere. In ogni camera soggiornano due persone e in nessun hotel ci sono stanze libere. Un giorno, tutti gli hotel tranne uno sono costretti a chiudere per lavori di ristrutturazione e ognuno degli ospiti rimasti senza alloggio cerca di prenotare una camera tutta per sé nell'unico hotel aperto. A questo punto, anche gli ospiti già presenti in questo hotel pretendono una camera ad uso singolo. Sarà possibile accontentare tutti? In che modo?

Esercizio 2. Sia A un insieme finito e sia B un insieme infinito (non necessariamente numerabile) tale che $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che la cardinalità di $A \cup B$ è uguale alla cardinalità di B. (Suggerimento: si può utilizzare il fatto che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile).

Esercizio 3. Come nell'esercizio 2 con A insieme numerabile e B insieme infinito (non necessariamente numerabile) tale che $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che la cardinalità di $A \cup B$ è uguale alla cardinalità di B. (Suggerimento: si può utilizzare il fatto che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile).

Esercizio 4. Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 5. Dimostrare che l'insieme delle successioni di numeri naturali non è numerabile (Suggerimento: se fosse numerabile potremmo elencare le infinite successioni e poi utilizzare il procedimento diagonale...).

1.2 Numeri primi e dove trovarli - prof. Orazio Puglisi

Ricordiamo alcuni fatti.

- Il simbolo $a|b$ vuol dire *a divide b*, mentre $a \nmid b$ indica la sua negazione, ovvero *a non divide b*.
- Se $m \geq 1$ è un numero naturale, il suo *fattoriale* $m!$ è definito come

  $$m! = 1 \cdot 2 \cdots (m-1) \cdot m$$

  ovvero il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali ad m.

Ricordiamo anche il seguente risultato.

Teorema di Wilson *Sia p un primo. Allora $p \mid (p-1)! + 1$.*

Questa serie di esercizi ci porterà alla dimostrazione del fatto che il Teorema di Wilson è un test di primalità, anche se per nulla pratico.

Esercizio 1(Facoltativo) Sia $n \geq 1$ un numero naturale. Allora

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 2 Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n = xy$ con $x, y \in \mathbb{N}$ e $x, y \geq 2$. Allora x e y dividono $(n-1)!$.

Esercizio 3 Usare l'Esercizio 2 per dimostrare che, se $n \in \mathbb{N}$ non è potenza di un primo, allora $n \mid (n-1)!$. Dedurre che, se un intero soddisfa la tesi del Teorema di Wilson, allora deve essere una potenza di un primo.

Esercizio 4 Sia $n = p^k$ con p un primo e $k \geq 3$ un numero naturale. Dimostrare che $n \mid (n-1)!$. Dedurre che, se $n = p^k$ soddisfa la tesi del Teorema di Wilson, allora $k \leq 2$.

Esercizio 5 Siano p un primo dispari ed $n = p^2$. Provare che $n \mid (n-1)!$. Dedurre che, se $n = p^2$ soddisfa la tesi del Teorema di Wilson, allora $p = 2$ ed $n = 4$. Controllare che 4 non soddisfa la tesi del Teorema di Wilson.

Abbiamo quindi provato

Teorema *Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Allora n è primo se e solo se*

$$n \mid (n-1)! + 1.$$

1.3 In media stat virtus - prof. Francesco Mugelli

Esercizio 1. Dimostrare che $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. In quali casi vale l'uguaglianza?

Esercizio 2. Quanto vale al massimo $x^2 y$ quando $x + y = 1$? Per quali valori di x e di y viene raggiunto?

Esercizio 3. Dimostrare che $\forall (x, y) \neq (0, 0)$

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Dire se la disuguaglianza è ottimale, ovvero se esistono $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.c $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ oppure $\frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Dimostrare che se $a, b > 0$ vale $(a+b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$.

Esercizio 5.(Più difficile) Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq n\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

quando $x_i > 0\ \forall i$ e $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Esercizio 6.(Difficile) Se a, b, c sono le lunghezze dei lati di un triangolo dimostrare che

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$$

1.4 Come imparare a spostare la sabbia con meno fatica possibile ci aiuta nello sudio dell'intelligenza artificiale - prof. Luigi De Pascale

Esercizio 1. Su uno scaffale della libreria di Mario ci sono n libri tutti uguali. Lo scaffale è molto lungo e potrebbe contenere molti più libri. I libri occupano i primi n posti sulla sinistra dello scaffale e Mario vorrebbe spostarli tutti in un area più a destra. Mario vorrebbe fare meno fatica possibile.

1. Mostrare che se la fatica che Mario compie per spostare un libro è proporzionale al quadrato del numero di posti di cui lo ha spostato allora gli conviene lasciare i libri nello stesso ordine in cui si trovano (se il libro A è inizialmente a destra del libro B, è bene che rimanga così);

2. mostrare che se, invece, la fatica è proporzionale al numero di posti di cui il libro è stato spostato, allora non importa mantenere l'ordine;

3. nei due punti precedenti, il fatto che i libri fossero tutti uguali (stesso peso) è rilevante? Sapresti proporre un'estensione al caso in cui i libri non hanno nemmeno lo stesso spessore? E se potessimo rompere i libri?

Esercizio 2. Agenore è su una collina e guarda un gruppo di operai che sta riempiendo alcune gigantesche buche nella piana sottostante. Ciascun operaio riempie la propria carriola prendendo la sabbia da una delle pile disponibili e poi si reca, in linea retta alla buca che sta riempiendo. Sulle prime, Agenore, osserva affascinato con quanta cura gli operai riescono ad evitarsi quando i loro percorsi si incrociano. Poi, improvvisamente, esclama: *fermi tutti!!! È evidente che state facendo più lavoro del necessario.*

Sapresti spiegare l'affermazione di Agenore?

Esercizio 3. Una compagnia assicurativa decide di avviare una nuova attività di assicurazioni individuali in un'area sperduta delle Ande. Per stabilire i premi, la compagnia dispone di tre soli dati (e_i, c_i) (età del sottoscrittore, costo per la compagnia) precedenti.

$$(35, 100),\ (38, 105),\ (40, 106).$$

Se si suppone che il costo sia legato all' età di sottoscrizione da una relazione del tipo $c = m \cdot e + b$ sapresti prevedere il costo per assicurare un nuovo cliente di 43 anni?

1.5 Emmy Noether la Signora degli anelli e delle simmetrie - prof.ssa Lucia Sanus, prof.ssa Nella Rotundo

Consideriamo l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine 2×2

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ per ogni } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Date due matrici appartenenti a questo insieme

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

definiamo in $\mathbb{M}$ due operazioni:

$$\textbf{somma} + \quad : A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

e il

$$\textbf{prodotto} * \quad : A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot d_2 \\ c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo inoltre il sottoinsieme di $\mathbb{M}$ che chiameremo $\mathbb{M}_1$ dato dalle matrici del tipo

$$\mathbb{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

ed un altro sottoinsieme $\mathbb{M}_1^{\#}$ dato dalle matrici del tipo

$$\mathbb{M}_1^{\#} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

Esercizio 1. Dimostrate che la struttura algebrica $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 2. La struttura algebrica $(\mathbb{M}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 3. Trovate un controesempio per dimostrare che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}$ non è commutativa.

Esercizio 4. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, +)$ è un gruppo abeliano? Perché?

Esercizio 5. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, *)$ è un gruppo? Perché?

Esercizio 6. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un gruppo? Perché?

Esercizio 7. Dimostrate che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}_1$ è commutativa.

Esercizio 8. Il gruppo $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, *)$? e Il gruppo $(\mathbb{M}_1, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, +)$

Esercizio 9. $(\mathbb{M}, +, *)$ è un anello?

Esercizio 10. $(\mathbb{M}_1, +, *)$ è un anello?

1.6 Come rendere esatte le approssimazioni? - prof. Giuliano Lazzaroni

Esercizio 1. Applicare il metodo di bisezione alla funzione $f(x) = x^2 - 2$ per cercare una approssimazione di $\sqrt{2}$.
Cercare cioè un intervallo (a, b) con $f(a) < 0 < f(b)$; valutare f nel punto medio e ridursi a un nuovo intervallo, e così via.
Ad ogni iterazione, confrontare quanto ottenuto con il valore $\sqrt{2} \simeq 1.41421356...$ ed evidenziare le cifre significative trovate.
Quante iterazioni sono necessarie per approssimare $\sqrt{2}$ con una "precisione" di 10^{-1}, cioè, per trovare che $a < \sqrt{2} < b$ con $b - a < 10^{-1}$?
Senza fare tutti i calcoli e senza conoscere il valore di $\sqrt{2}$, come si può stabilire quante iterazioni servono per ottenere un errore minore di 10^{-6}?

Esercizio 2. Cercare una approssimazione di π ricordando la relazione

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Sommare i primi n termini e confrontare quanto ottenuto con il valore $\pi/4 \simeq 0.78539816...$ evidenziando le cifre significative trovate.
Quante iterazioni sono necessarie per approssimare $\pi/4$ con una "precisione" di 10^{-1}, cioè, per trovare che $a < \pi/4 < b$ con $b - a < 10^{-1}$?
Senza fare tutti i calcoli e senza conoscere il valore di π, come si può stabilire quante iterazioni servono per ottenere un errore minore di 10^{-6}?

Esercizio 3. Quale delle seguenti relazioni è vera?

$$0,\bar{9} < 1 \qquad 0,\bar{9} = 1 \qquad 0,\bar{9} > 1$$

Per rispondere ricordare che

$$0,\bar{9} = 0,99999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots$$

Introdurre la successione

$$a_1 = 0,9 \quad a_2 = 0,99 \quad a_3 = 0,999 \quad a_4 = 0,9999 \quad \dots$$

e osservare che

- per ogni k, si ha $a_k < 1$
- per ogni numero $p < 1$, possiamo trovare un indice k con $p < a_k < 1$

Come ci aiutano queste proprietà a rispondere alla domanda iniziale?

Capitolo 2

Soluzioni

2.1 A lezione d'infinito - prof. Samuele Antonini

Soluzione dell'esercizio 1. L'insieme degli hotel è numerabile e l'insieme degli ospiti di ogni hotel è numerabile; dunque l'insieme degli ospiti di tutti gli hotel è unione numerabile di insiemi numerabili e pertanto è un insieme numerabile (dimostrato a lezione). Per esempio, possiamo indicare con H_n l'n-esimo hotel, con H_0 l'unico hotel che rimane aperto e con (n, m) la camera m dell'hotel H_n. Procediamo ora in due passi.

- Seguendo le diagonali possiamo abbinare alle due persone che occupavano la stanza (n, m) una stanza dell'hotel H_0 nel modo seguente:

$$(0,0) \to (0,0)$$
$$(0,1) \to (0,1)$$
$$(1,0) \to (0,2)$$
$$(0,2) \to (0,3)$$
$$(1,1) \to (0,4)$$
$$(2,0) \to (0,5)$$
$$(0,3) \to (0,6)$$
$$...$$
$$...$$

- A questo punto, ogni coppia che prima soggiornava in uno qualsiasi degli hotel ha una stanza nell'hotel H_0. Sarà ora sufficiente sistemare le due persone della camera $(0, m)$ nelle due camere $(0, 2m)$ e $(0, 2m + 1)$.

Soluzione dell'esercizio 2. Poiché B è infinito esistono infiniti elementi di B a due a due distinti che denotiamo con $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ (ATTENZIONE! Non è affatto detto che questi siano tutti gli elementi di B). Siano $a_1, ..., a_k$ gli elementi di A. Consideriamo la funzione $f : A \cup B \to B$ così definita:

$$\begin{array}{ll} f(a_n) = b_n & \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k \\ f(b_n) = b_{n+k} & \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \\ f(x) = x & \forall x \in B \text{ tale che } x \notin \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\} \end{array}$$

La funzione f è biunivoca e pertanto $A \cup B$ e B hanno la stessa cardinalità.

Soluzione dell'esercizio 3. Poiché B è infinito esistono infiniti elementi di B a due a due distinti che denotiamo con $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ (ATTENZIONE! Non è affatto detto che questi siano tutti gli elementi di B). Siano $a_1, ..., a_k, ...$ gli elementi di A. Consideriamo la funzione $f : A \cup B \to B$

$$\begin{array}{ll} f(a_n) = b_{2n} & \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \\ f(b_n) = b_{2n-1} & \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \\ f(x) = x & \forall x \in B \text{ tale che } x \notin \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\} \end{array}$$

La funzione f è biunivoca e pertanto $A \cup B$ e B hanno la stessa cardinalità.

Soluzione dell'esercizio 4. La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(a + bi) = (a, b)$ è biunivoca, dunque $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ hanno la stessa cardinalità. Come dimostrato a lezione, $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}^2$ e questo conclude la dimostrazione.

Soluzione dell'esercizio 5. Supponiamo che l'insieme delle successioni di numeri naturali sia numerabile. Dunque possiamo elencare tutte le successioni, disponendole, per esempio, in modo che nella prima riga ci sia la prima successione, nella seconda riga la seconda successione, e così via:

$$\begin{array}{c} a_{00},\ a_{01},\ a_{02},\ ...... \\ \\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ ...... \\ \\ a_{20},\ a_{21},\ a_{22},\ ...... \\ \\ \vdots \end{array}$$

Possiamo ora costruire una successione diversa da tutte quelle elencate, per esempio la seguente, che si ottiene sommando 1 a ciascun termine sulla diagonale:

$$a_{00} + 1,\ a_{11} + 1,\ ......,\ a_{nn} + 1,\ ......$$

Questa successione è diversa da tutte quelle elencate perché il suo termine n-esimo è diverso dal termine n-esimo della n-esima successione. Dunque l'elenco delle successioni non è completo, contrariamente all'ipotesi iniziale. Pertanto l'insieme delle successioni non è numerabile.

2.2 Numeri primi e dove trovarli - prof. Orazio Puglisi

Soluzione dell'esercizio 1. Poniamo $S = \sum_{i=1}^{n} i$ e scriviamo

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i).$$

Da questo si ottiene

$$2S = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) = \sum_{i=1}^{n} (i + n + 1 - i) = \sum_{i=1}^{n} (n + 1) = n(n + 1)$$

da cui la tesi. $\square$

Soluzione dell'esercizio 2. Questo è ovvio visto che $x, y \leq n/2 \leq n-1$. $\square$

Soluzione dell'esercizio 3. Se n non è una potenza di primo, la sua fattorizzazione in primi è del tipo

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} \qquad p_i \neq p_j \quad \text{se } i \neq j$$

con $m \geq 2$. L'Esercizio 2 ci dice che $p_i^{k_i} \mid (n-1)!$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Di conseguenza n divide $(n-1)!$. Quindi $n \not| \, (n-1)! + 1$ e pertanto, se un numero naturale soddisfa l'enunciato del Teorema di Wilson, deve necessariamente essere una potenza di un primo. $\square$

Soluzione dell'esercizio 4. Basta osservare che $p^i \leq n-1$ per ogni $i < k$. Quindi $(n-1)!$ è divisibile per

$$p \cdot p^2 \cdots p^{k-1} = p^{\sum_{i=1}^{k-1} i}.$$

Usiamo ora l'Esercizio 1 per vedere che $p^{\frac{k(k-1)}{2}}$ divide $(n-1)!$. Nelle nostre ipotesi $k \leq k(k-1)/2$ e quindi $n \mid p^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Allora, se $n = p^k$ soddisfa la tesi del Teorema di Wilson, deve essere $k = 2$. $\square$

Soluzione dell'esercizio 5. Dato che $p \neq 2$, abbiamo $2p \neq p^2 = n$ e quindi $2p \leq n-1$. Allora $p \cdot (2p)$ divide $(n-1)!$, da cui segue $n \mid (n-1)!$. L'ultimo passo è un semplice controllo. $\square$

Abbiamo quindi provato

Teorema *Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Allora n è primo se e solo se*

$$n \mid (n-1)! + 1.$$

2.3 In media stat virtus - prof. Francesco Mugelli

Soluzione dell'esercizio 1. È sufficiente utilizzare le disuguaglianze di riordinamento sugli insiemi $\{x, y, z\}$, $\{x, y, z\}$. Non sappiamo come sono ordinati x, y, z ma se associamo x con x, y con y e z con z prendiamo le due serie nello stesso ordine quindi il valore $x^2 + y^2 + z^2$ è sicuramente maggiore o uguale a qualunque altro ottenuto associando le serie in modo diverso, in particolare a quello ottenuto accoppiando x con y, y con z, z con x ovvero $xy + yz + zx$ che è proprio il secondo membro.

Soluzione dell'esercizio 2. Osserviamo che $x + y = 2AM(x, y) = 1$. Possiamo tentare di utilizzare $AM \geq GM$ ma $GM(x, y) = \sqrt{xy}$ cioè $xy = [GM(x, y)]^2$ mentre ci viene chiesto di valutare $x^2 y$ e non xy. Dobbiamo aggiustare il tiro. Psserviamo che $GM(x, x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ cioè $x^2 y = [GM(x, x, y)]^3$. In questo caso però $AM(x, x, y) = \frac{2x+y}{3}$ non è più il valore assegnato. Possiamo aggiustare le cose considerando le medie aritmetica e geometrica di $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, y$. Si ha:

$$AM\Big(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, y\Big) = \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y\Big) = \frac{1}{3}(x + y) = \frac{1}{3}$$

$$GM\Big(\frac{x}{2},\frac{x}{2},y\Big)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{x^2y}$$

Quindi $\frac{1}{3}=AM\Big(\frac{x}{2},\frac{x}{2},y\Big)\geq GM\Big(\frac{x}{2},\frac{x}{2},y\Big)=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{x^2y}$. Elevando al cubo: $\frac{1}{27}\geq\frac{1}{4}x^2y$ cioè $x^2y\leq\frac{4}{27}$.

L'uguaglianza vale quando $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=y$ cioè quando

$$\begin{cases}x=2y\\x+y=1\end{cases}$$

ovvero quando $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$. Per tali valori si ha $x^2y=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

Soluzione dell'esercizio 3. Sia $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Osserviamo che $f(x,-y)=-f(x,y)$ e che se $x,y>0$ $f(x,y)>0$. Limitiamoci a valori positivi di x e y. Osserviamo che $xy=[GM(x,y)]^2$ e che $QM(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ ovvero che $x^2+y^2=2[QM(x,y)]^2$. Poichè $GM\leq QM$, e quindi $GM^2\leq QM^2$, segue $xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$ cioè $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}$.

L'uguaglianza in $GM\leq QM$ vale quanso $x=y$ e $f(x,y)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$. Il valore $\frac{1}{2}$ è effettivamente raggiunto quindi la disuguaglianza è ottimale. Osserviamo infine che $f(x,-x)=-f(x,x)=-\frac{1}{2}$ ovvero che $f(x,y)\geq-\frac{1}{2}$ $\forall(x,y)\neq(0,0)$.

Soluzione dell'esercizio 4. Svolgiamo i calcoli e semplifichiamo:

$$\cancel{a^5}+ab^4+a^4b+\cancel{b^5}\geq\cancel{a^5}+a^2b^3+a^3b^2+\cancel{b^5}$$

$$\cancel{ab}(a^3+b^3)\geq\cancel{ab}(ab^2+a^2b)$$

Dimostrare la disuguaglianza assegnata diventa dimostrare che $a^3+b^3\geq ab^2+a^2b$ ma questa è vera per la disuguaglianza di riordinamento utilizzata con le serie (a,b) e (a^2,b^2).

Soluzione dell'esercizio 5. Il primo membro è una somma di reciproci: ci fa pensare ad una media armonica:

$$HM(\sqrt{1-x_1}\dots\sqrt{1-x_n})=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}}$$

Se proviamo a confrontare con la media aritmetica però:

$$AM(\sqrt{1-x_1}\dots\sqrt{1-x_n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$$

non è molto utile. Se invece confrontiamo con la media quadratica ($HM\leq QM$):

$$QM(\sqrt{1-x_1},\dots,\sqrt{1-x_n})=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}=\sqrt{\frac{1}{n}(1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}(n-(x_1+\cdots+x_n))}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'ipotesi che $x_1+\cdots+x_n=1$. Confontando HM con QM otteniamo la disuguaglianza assegnata.

Soluzione dell'esercizio 6. Proviamo a cambiare variabili: poniamo

$$u = a + b - c, \qquad v = b + c - a, \qquad w = c + a - b.$$

Poichè a, b, c sono i lati di un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due quindi $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$. Osserviamo poi che $a = \frac{u+w}{2}$, $b = \frac{v+u}{2}$, $c = \frac{w+v}{2}$ quindi $abc = \frac{1}{8}(u+v)(v+w)(w+u)$. È sufficiente dimostrare che $8uvw \leq (u+v)(v+w)(w+u)$.

$$(u+v)(v+w)(w+u) = \ldots \text{calcoli} \cdots = 2uvw + uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u)$$

semplificando:

$$6uvw \leq uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u)$$

e dividendo per u, v, w:

$$6 \leq \frac{u+v}{w} + \frac{v+w}{u} + \frac{w+u}{v}$$

Se $x > 0$ $x + \frac{1}{x} = 2AM(x, \frac{1}{x}) \geq GM(x, \frac{1}{x}) = 2$. Utilizzando tre volte questa disuguaglianza si ha $\frac{u}{w} + \frac{w}{u} \geq 2$, $\frac{v}{u} + \frac{u}{v} \geq 2$, $\frac{v}{w} + \frac{w}{v} \geq 2$ cioè la tesi.

2.4 Come imparare a spostare la sabbia con meno fatica possibile ci aiuta nello sudio dell'intelligenza artificiale - prof. Luigi De Pascale

Soluzione dell'esercizio 1.

1. Siano $l_1, \ldots, l_n$ i libri. Il libro i-esimo occupa inizialmente la posizione i e viene spostato nella posizione k_i. La "fatica" F è data dalla formula

$$F = c \sum_{i=1}^{n} (k_i - i)^2$$

con c costante di proporzionalità (ragionevolmente $c \sim m^2$ dove m è la massa di un libro). Si ha

$$\frac{F}{c} = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot i$$

I primi due termini non variano se si cambia l'ordine dei libri quindi, per minimizzare F, bisogna minimizzare $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot i$. Mostriamo che se $i < j$ ma $k_i > k_j$ allora

$$i \cdot k_i + j \cdot k_j < i \cdot k_j + j \cdot k_i$$

L'ultima disuguaglianza può infatti essere scritta come

$$0 < (k_i - k_j) \cdot (i - j)$$

2. In questo secondo caso F ha la forma

$$F = c \sum_{i=1}^{n} (k_i - i) = c \sum_{i=1}^{n} k_i - c \sum_{i=1}^{n}$$

e quindi non dipende dall'ordine delle posizioni k_i.

3. Se il libro l_i avesse massa m_i, ragionevolmente,

$$Fc\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (k_i - i)^2$$

e, nuovamente

$$F = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot k_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot k_i \cdot i$$

Se $i < j$ ma $k_i > k_j$, purtroppo, la disuguaglianza vista in 1. diventa

$$k_j \cdot m_i \cdot i - k_i \cdot m_j \cdot j < k_i \cdot m_i \cdot i - k_j \cdot m_j \cdot j$$

la cui veridicità dipende da m_i e m_j.

Potendo "rompere" i libri supponiamo (senza perdita di generalià) che $m_i < m_j$ e quindi $m_j = m_i + r$, $r > 0$. La disuguaglianza diviene:

$$0 < (k_i - k_j)r \cdot j + (k_i - k_j)m_i(j - i)$$

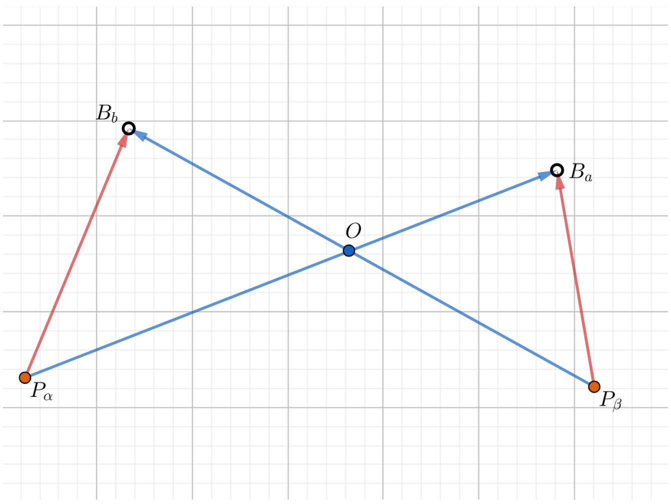
che è vera ed indica che converrebbe spostare la destinazione del libro l_i con parte di quella del libro l_j. Nulla cambia nel punto 2.

Soluzione dell'esercizio 2. Indichiamo con $P_1, \ldots, P_n$ le posizioni delle n pile di sabbia e con $B_1, \ldots, B_k$ le posizioni delle k buche. Il lavoro svolto è espresso da:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}|P_i - B_j|$$

con m_{ij} massa della sabbia spostata dalla pila P_i alla buca B_j e $|P_i - B_j|$ relativa distanza (massa $\times$ spostamento).

Mostriamo che gli incroci non ottimizzano il lavoro. Supponiamo che le vie (α, a) e (β, b) si incrocino e tracciamole in blu:



Mostriamo come ridurre la parte di lavoro relativa ai termini

$$m_{\alpha a}|P_\alpha - B_a| + m_{\beta b}|P_\beta - B_b|$$

Usiamo il fatto che, indipendentemente dal disegno ingannevole, la somma delle due vie rosse è più breve della somma delle due vie blu.

Esercizio per il lettore: dimostrare che in un quadrilatero la somma delle diagonali è sempre maggiore della somma di due lati opposti. (Suggerimento: utilizzare la disuguaglianza triangolare.)

Supponiamo $m_{\alpha a} \leq m_{\beta b}$ (l'altro caso è analogo) e dunque $m_{\beta b} = m_{\alpha a} + r$ con $r \geq 0$, si ha

$$m_{\alpha a}|P_\alpha - B_a| + m_{\beta b}|P_\beta - B_b| = m_{\alpha a}(|P_\alpha - B_a| + |P_\beta - B_b|) + r|P_\beta - B_b| >$$

$$> m_{\alpha a}(|P_\alpha - B_b| + |P_\beta - B_a|) + r|P_\beta - B_b|$$

Converrebbe, dunque, scambiare le destinazioni di $m_{\alpha a}$ e della parte corrispondente di $m_{\beta b}$

Soluzione dell'esercizio 3. Si tratta di determinare m_0 e b_0 nel modello di costo $c = m \cdot e + b$ in modo che il costo sia il più vicino possibile ai dati in possesso della compagnia. Se denotiamo con (e_1, c_1), (e_2, c_2) ed (e_3, c_3) i dati noti, vogliamo determinare m_0 e b_0 che rendano minima l'espressione

$$\frac{(c_1 - m \cdot e_1 - b)^2}{2} + \frac{(c_2 - m \cdot e_2 - b)^2}{2} + \frac{(c_3 - m \cdot e_3 - b)^2}{2}$$

Questa espressione è quadratica in m e b e dunque è sufficiente determinare m_0 e b_0 che annullino le derivate rispetto ad m e b. (Suggerimento: i conti possono diventare lunghi e difficili se svolti nell'ordine sbagliato).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial m} : -(c_1 - m \cdot e_1 - b)e_1 - (c_2 - m \cdot e_2 - b)e_2 - (c_3 - m \cdot e_3 - b)e_3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} : -(c_1 - m \cdot e_1 - b) - (c_2 - m \cdot e_2 - b) - (c_3 - m \cdot e_3 - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + b(e_1 + e_2 + e_3) - (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) = 0 \\ m(e_1 + e_2 + e_3) + 3b - (e_1 + e_2 + e_3) = 0 \end{cases}$$

b può essere ricavato dalle due espressioni in funzione di m e poi, per sostituzione, si ottengono m_0 e b_0. Si può infine calcolare

$$c_4 = m_0 \cdot 43 + b_0$$

ed osservare che questo modo di scrivere i coefficienti delle equazioni si presta ad essere esteso anche al caso di moltissimi dati pregressi.

2.5 Emmy Noether la Signora degli anelli e delle simmetrie - prof.ssa Lucia Sanus, prof.ssa Nella Rotundo

Prima di passare alla risoluzione degli esercizi richiamiamo le definizioni di gruppo (abeliano) e di anello.

Definizione di Gruppo

Affinchè un insieme $\mathbb{G}$ ed una operazione " $\circ$ " costituiscano la struttura di gruppo abeliano devono verificarsi le seguenti proprietà

a) Per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{G}$ deve aversi che $a \circ b \in \mathbb{G}$ (l'insieme è chiuso rispetto all'operazione)

b) Vale la proprità associativa, $\forall a, b, c$ si ha che $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

c) Esiste l'elemento neutro $e \in \mathbb{G}$ tale che $a \circ e = e \circ a = a$

d) Esiste l'elemento inverso per ogni elemento $a \in \mathbb{G}$, cioè esiste $a' \in \mathbb{G}$ tale che $a \circ a' = a' \circ a = e$

e) Per essere abeliano deve essere verificata anche la proprietà commutativa, per ogni $a \circ b = b \circ a$, $\forall a, b \in \mathbb{G}$.

Definizione di Anello

La struttura algebrica dotata di due operezioni $(\mathbb{A}, +, *)$ è un anello se sono soddisfatte le seguenti propietà:

a) $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano

b) $a * (b * c) = (a * b) * c$ per ogni $a, b, c, \in \mathbb{A}$ (associatività del prodotto)

c) esiste $e \in \mathbb{A}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{A}$, $a * e = a = e * a$ (elemento neutro per il prodotto)

d) Valgono le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma, ovvero, per ogni $a, b, c \in \mathbb{A}$:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \qquad \text{e} \qquad (b + c) * a = b * a + c * a.$$

Soluzione dell'esercizio 1.
La struttura algebrica $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano se sono verificate le 5 proprietà da a) ad e)

a) Immediata.

b) Immediata.

c) L'elemento neutro di $\mathbb{M}$ rispetto alla somma è la matrice che possiete tutti elementi nulli $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, infatti sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si ha

$$A + E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

d) Esiste l'elemento inverso per ogni elemento $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ che è $A' = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ infatti si ha si ha

$$A + A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

e) Anche la proprietà commutativa è abbastanza immediata, viene ereditata dalla stessa proprietà che vale per la somma di due numeri.

Soluzione dell'esercizio 2. La struttura algebrica $(\mathbb{M}, *)$ è un gruppo se sono verificate le 4 proprietà da a) ad d)

a) Immediata.

b) Immediata.

c) L'elemento neutro di $\mathbb{M}$ rispetto al prodotto righe per colonne è la matrice $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ chiamata matrice identità, infatti sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si ha

$$A * I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

ed anche

$$I * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

d) Esiste l'elemento inverso per ogni elemento $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ che è $A' = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ infatti si ha si ha

$$A * A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} + \frac{ab}{ad-bc} \\ \frac{cd}{ad-bc} - \frac{dc}{ad-bc} & -\frac{cb}{ad-bc} + \frac{ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ma **attenzione** che cosa succede quando $ad - bc = 0$? La matrice non ammette elemento inverso! Quindi $(\mathbb{M}, *)$ non è un gruppo, bensì il sottoinsieme di $\mathbb{M}$ delle matrici invertibili è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto.

Soluzione dell'esercizio 3.

Consideriamo le due matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ che appartendono a $\mathbb{M}$. Abbiamo che

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre invece

$$B * A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi in questo caso non vale la propietà commutativa, per cui non si può dire che valga in generale in tutto l'insieme $\mathbb{M}$.

Soluzione dell'esercizio 4.

La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, +)$ è un gruppo abeliano se sono verificate le 5 proprietà da a) ad e).

a) La prima cosa importante da verificare è che quando si sommano due elementi che appartengono ad $\mathbb{M}_1$ il risultato appartenga ancora ad $\mathbb{M}_1$, cioè l'operazione è interna. Prendiamo due matrici appartenenti ad $\mathbb{M}_1$ e calcoliamo la somma

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

questo è sicuramente un elemento appartenente ad $\mathbb{M}_1$.

b) La proprietà è immediata perché viene ereditata dal fatto che vale in $\mathbb{M}$ quindi vale anche in un suo sottoinsieme.

c) Bisogna verificare che l' elemento neutro rispetto alla somma appartenga all'insieme $\mathbb{M}_1$. Appartiene ad $\mathbb{M}_1$ perche basta scegliere l'elemento a uguale a zero. Quindi $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, infatti sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartiene ad $\mathbb{M}_1$.

d) Esiste l'elemento inverso per ogni elemento di $\mathbb{M}_1$ infatti per ogni $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ basta scegliere $A' = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ che appartiene ancora ad $\mathbb{M}_1$ ed è tale che

$$A + A' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

e) La proprietà commutativa viene ereditata dal fatto che vale in $\mathbb{M}$.

Ne segue che la struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, +)$ costituisce un gruppo abeliano.

Soluzione dell'esercizio 5.

a) La prima cosa importante da verificare anche in questo caso è che quando si fa il prodotto tra due elementi che appartengono ad $\mathbb{M}_1$ il risultato appartenga ancora ad $\mathbb{M}_1$, cioè l'operazione è interna. Prendiamo due matrici appartenenti ad $\mathbb{M}_1$ e calcoliamo il loro prodotto

$$A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

questo è sicuramente un elemento appartenente ad $\mathbb{M}_1$.

b) Immediata

c) L'elemento neutro di $\mathbb{M}_1$ rispetto al prodotto righe per colonne è la matrice $I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ infatti per ogni matrice $A \in \mathbb{M}_1$ si ha

$$A * I_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ed anche

$$I_1 * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

d) L'elemento inverso A' di un elemento appartenente ad $\mathbb{M}_1$ deve essere tale che per ogni matrice A si abbia che $A * A' = I_1$ quindi dovremmo avere

$$A * A' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I_1$$

ma **attenzione** questa operazione si può fare se e solo se $a \neq 0$! Quindi in generale non è vero che per ogni matrice appartenente ad $\mathbb{M}_1$ esista la matrice inversa. Quindi la struttura $(\mathbb{M}_1, *)$ non è un gruppo.

Soluzione dell'esercizio 6. Se invece esclusiamo da $\mathbb{M}_1$ tutte le matrici che hanno $a = 0$ costruiamo l'inieme $\mathbb{M}_1^{\#}$, in questo insieme esiste l'elemento neutro per pgni matrice. Quindi $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ é gruppo.

Soluzione dell'esercizio 7. Prendiamo due matrici $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{M}_1$ e calcoliamo il loro prodotto

$$A * B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B * A$$

perché l'operazione prodotto in $\mathbb{R}$ è commutativa.
Questo ci porta anche ad aggiungere che il gruppo $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ é anche abeliano.

Soluzione dell'esercizio 8.
La risposta qui è immediata semplicemente perchè $(\mathbb{M}, *)$ non è un gruppo. Invece osserviamo che $(\mathbb{M}_1, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, +)$.

Soluzione dell'esercizio 9.
Si, perché $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano e perché il prodotto è associativo, inoltre esiste l'elemento neutro che è la matrice identità $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e valgo le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma:

$$A(B + C) = AB + AC \text{ e } (B + C)A = BA + CA.$$

Soluzione dell'esercizio 10.
Si, perché $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano e perché il prodotto associativo, esiste elemento neutro che è la matrice identità $I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e valgono le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma:

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{e} \qquad (B + C)A = BA + CA.$$

Osservazioni finali

Si può osservare come ci sia una corrispondenza tra gli elementi appartenenti ai numeri reali $\mathbb{R}$ e gli elementi dell'insieme $\mathbb{M}_1$, questa corrispondenza rispetta le operazioni di somma e di prodotto. Possiamo visualizzare questa corrispondenza nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \Longrightarrow & \mathbb{M}_1 \\ a & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \Longrightarrow & \mathbb{M}_1 \\ b & \longmapsto & \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ad ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ facciamo corrispondere la matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_1$ e ad ogni elemento $b \in \mathbb{R}$ facciamo corrispondere la matrice $\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_1$ allora alla somma $a + b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \Longrightarrow & \mathbb{M}_1 \\ a + b & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \end{array}$$

corrisponde la somma delle due matrici $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Così come al prodotto $ab \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \Longrightarrow & \mathbb{M}_1 \\ ab & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

corrisponde il prodotto righe per colonne delle due matrici in $\mathbb{M}_1$ cioè $\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.6 Come rendere esatte le approssimazioni? - prof. Giuliano Lazzaroni

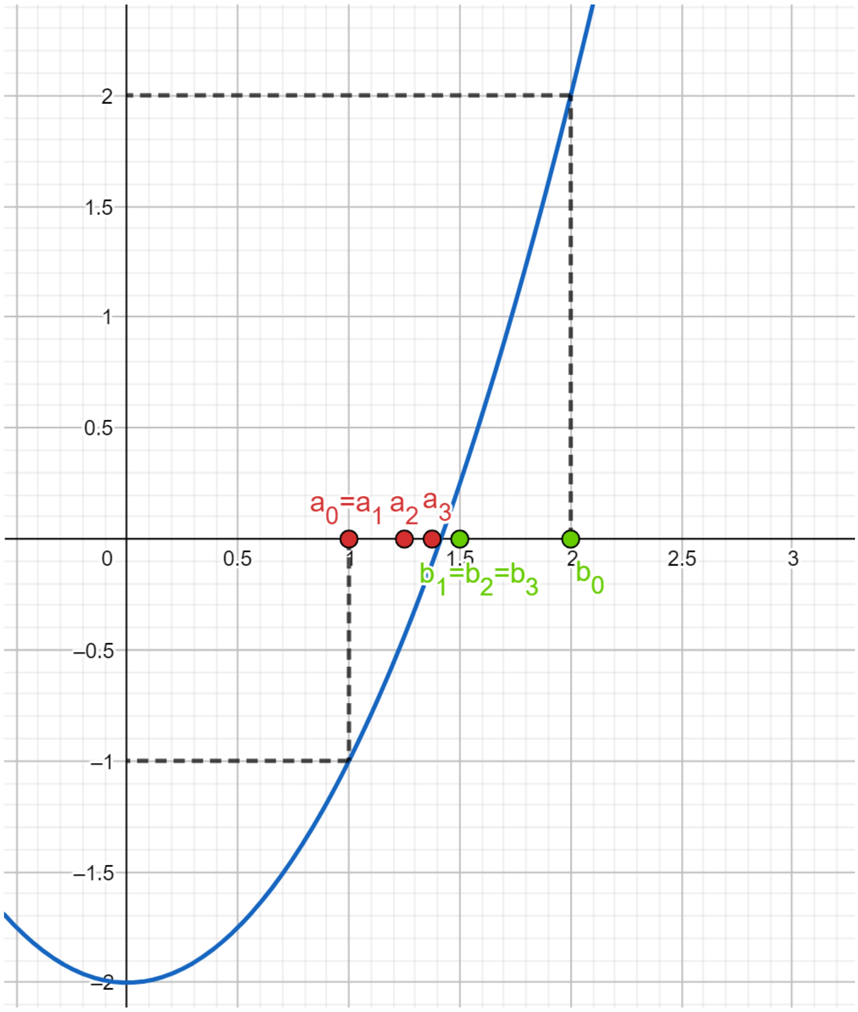
Soluzione dell'esercizio 1. Applichiamo il meto di bisezione alla funzione $f(x) = x^2 - 2$. Si parte con $[a_0, b_0] = [1, 2]$ perchè $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 2$.

0. $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $\frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2}$ e $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4} > 0$. Quindi si lascia fermo $a_1 = a_0 = 1$ e si aggiorna $b_1 = \frac{3}{2}$.

1. $a_1 = 1$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $\frac{a_1+b_1}{2} = \frac{5}{4}$ e $f(\frac{5}{4}) = -\frac{7}{16} < 0$. Quindi si aggiorna $a_2 = \frac{5}{4}$ e si lascia fermo $b_2 = b_1 = \frac{3}{2}$.

2. $a_2 = \frac{5}{4}$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $\frac{a_2+b_2}{2} = \frac{11}{8}$ e $f(\frac{11}{8}) = -\frac{7}{64} < 0$. Quindi si aggiorna $a_3 = \frac{11}{8}$ e si lascia fermo $b_3 = b_2 = \frac{3}{2}$.

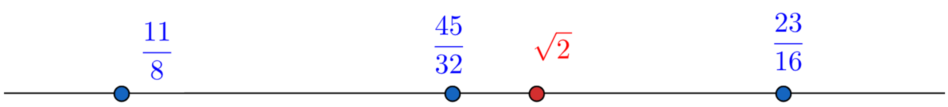
E così via...



Abbiamo trovato la seguente approssimazione di $\sqrt{2}$:

0. $\frac{3}{2} = 1,5 \in [1,2]$ intervallo di ampiezza 1.
1. $\frac{5}{4} = 1,25 \in [1, \frac{3}{2}]$ intervallo di ampiezza $\frac{1}{2}$.
2. $\frac{11}{8} = 1,375 \in [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ intervallo di ampiezza $\frac{1}{4}$.
3. $\frac{23}{16} = 1,4375 \in [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}]$ intervallo di ampiezza $\frac{1}{8}$.
4. $\frac{45}{32} = 1,40625 \in [\frac{11}{8}, \frac{23}{16}]$ intervallo di ampiezza $\frac{1}{16}$.

Abbiamo guadagnato una cifra significativa ($\sqrt{2} = 1,4142...$)



Si ha

$$\left|\frac{45}{32} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{23}{16} - \frac{11}{8}\right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$$

quindi siamo sicuri che alla quarta iterazione la precisione sarà almeno $\frac{1}{10}$. In realtà per stabilire con sicurezza la prima cifra decimale dovremmo calcolare 7 iterazioni perchè $2^7 = 128$ e $\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100}$ e quindi l'errore coinvolge soltanto le cifre dalla seconda in poi.

Senza fare calcoli, possiamo dire che dopo k iterazioni $\sqrt{2}$ sarà approssimato da $\frac{a_k+b_k}{2}$ e che $\sqrt{2}$, $\frac{a_k+b_k}{2} \in [a_k, b_k]$ perciò

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a_k + b_k}{2}\right| < b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$$

Per avere una precisione di 10^{-6} dobbiamo trovare k con $2^k > 10^6$: bisogna prendere $k = 20$ infatti $2^{20} = 1'048'576 > 10^6$.

Soluzione dell'esercizio 2. Approssimiamo π con le *somme parziali*. Sia S_k la somma (finita) dei primi k termini della serie. Abbiamo

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$$

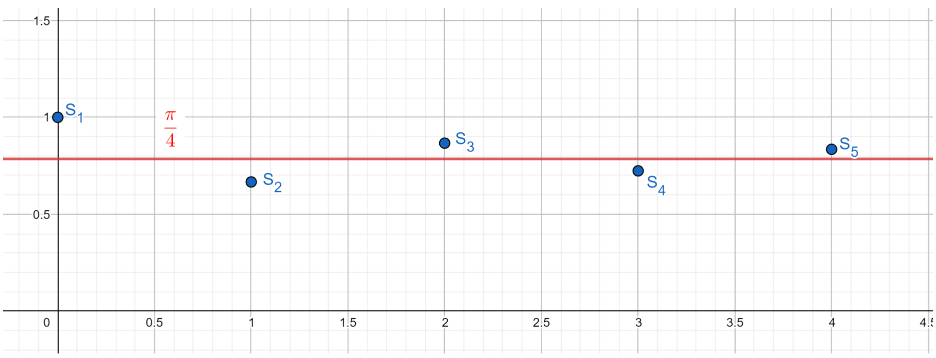
$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} = 0,8\bar{6}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105} = 0,7238...$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{263}{315} = 0,8349...$$

Da confrontare con $\frac{\pi}{4} = 0,785398...$

Rappresentiamo in un grafico i valori ottenuti:



I risultati dell'Analisi (che si imparano al primo anno) ci dicono che i valori calcolati delle somme parziali si avvicinano a $\frac{\pi}{4}$. Ad ogni iterazione passiamo da un numero maggiore di $\frac{\pi}{4}$ a un numero minore di $\frac{\pi}{4}$ o viceversa. Questo perchè i segni della serie sono alterni:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

In particolare, per esempio, avremo $S_5 > \frac{\pi}{4} > S_6$ e perciò se approssimiamo $\frac{\pi}{4} \approx S_5 = 0,8349...$ commettiamo un errore minore di $|S_5 - S_6| = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$. La differenza, in valore assoluto, tra due somme parziali una successiva all'altra si trova facilmente in quanto è il valore assoluto del termine che compare in una somma ma non nell'altra.

Dire che l'errore è minore di $\frac{1}{10}$ significa che la prima cifra decimale varia al più di 1. Per ottenere la prima cifra decimale con esattezza bisogna avere un errore minore di $\frac{1}{100}$ cioè trovare k tale che

$$\frac{1}{100} > |S_k - S_{k+1}| = \frac{1}{(k+1)\text{-esimo numero dispari}}$$

Quindi bisogna sommare circa 50 termini (tra 1 e 100 ci sono 50 numeri dispari). Se poi vogliamo un errore minore di $\frac{1}{10^6}$ si devono fare circa 500000 somme!

Infine per stimare π dobbiamo ricordare il fattore 4: se $|S_{500000} - \frac{\pi}{4}| < \frac{1}{10^6}$ si avrà $|4 \cdot S_{500000} - \pi| < \frac{4}{10^6}$. Per migliorare la stima si devono fare altre somme...

Soluzione dell'esercizio 3. Basta osservare che

$$0,9 < 0,99 < 0,999 < \cdots < 0,\bar{9}$$

È (quasi) ovvio che $0,\bar{9} \leq 1$ e si può quindi scartare la risposta "$0,\bar{9} > 1$"

Ora supponiamo per assurdo che $0,\bar{9} < 1$. Allora $0,\bar{9}$ è un numero minore di 1, chiamiamolo p. Dato $p < 1$ possiamo sempre trovare $a_k = 0,\underbrace{99\ldots9}_{k\text{cifre}}$ con $p < a_k < 1$ (per vederlo scrivere p in forma decimale). Ma $p > a_k$ è assurdo, perchè $0,\bar{9} > a_k$ $\forall k$, e quindi avendo trovato una contraddizione l'ipotesi era necessariamente assurda e non resta che il caso $0,\bar{9} = 1$.

In altre parole, per chi conosce i limiti:

$$a_k = 0,\underbrace{99\ldots9}_{k\text{cifre}} = 1 - \frac{1}{10^k} \to 1 \qquad \text{per } k \to +\infty$$

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare

- i relatori che hanno preparato i testi e le soluzioni degli esercizi: Samuele Antonini, Luigi de Pascale, Giuliano Lazzaroni, Francesco Mugelli, Orazio Puglisi, Nella Rotundo e Lucia Sanus;
- i tutor che hanno coordinato le sessioni di esercizi: Chiara Casini, Walter Fulceri, Leonardo Mazzoni, Matteo Montagnani e Bernardo Nannini;

Un ringraziamento particolare va a Leonardo Mazzoni che ha redatto questo libretto.

Le organizzatrici
Chiara Bianchini e Veronica Gavagna