SETTIMANA MATEMATICA FIORENTINA
2020

Sessione di ESERCIZI relativi a:

- **La Matematica e il colore dell'oro**, Luigi Barletti.
- **Genesi di un'idea: la formula di Eulero**, Fiammetta Battaglia.
- **Algebra, logica e carte di credito**, Caterina Stoppato.
- **Il taglia e incolla di superfici e la congettura di Poincaré**, Graziano Gentili.
- **Una lezione di Teoria dei Numeri**, Carlo Casolo.

La Matematica e il colore dell'oro.

Esercizio 1. Trovare le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x + 10 = 0$ e rappresentarle sul piano complesso.

Esercizio 2. Tracciare nel piano complesso i luoghi dei punti $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$ tali che

1. $\rho = 1$
2. $\theta = \pi/4$
3. $\rho = \theta^2$.

Esercizio 3. Utilizzando la rappresentazione polare dei numeri complessi, ricavare le formule di trigonometria

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Esercizio 4. Dato il numero complesso $z = a + ib$, con a e b non entrambi nulli, trovare l'espressione di $1/z$.

Esercizio 5. Dalla relazione fondamentale dei quaternioni $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ricavare le formule per i prodotti a coppie:

$$ij = k,\ ji = -k,\ jk = i,\ kj = -i,\ ki = j,\ ik = -j.$$

Esercizio 6. Dati i quaternioni $w_1 = 1 + 3\mathbf{k}$ e $w_2 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, calcolare i prodotti $w_1 w_2$ e $w_2 w_1$.

Esercizio 7. Trovare la matrice corrispondente alla trasformazione

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 - 3\psi_1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Verificare che le matrici

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

hanno le proprietà algebriche delle unità immaginarie dei quaternioni ($\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$).

Bibliografia: Dalida Monti, "Equazione di Dirac", (ed. Boringhieri).

Genesi di un'idea: la formula di Eulero.

Notazioni: si consideri un poliedro, indichiamo con F il numero delle sue facce, con E il numero dei suoi spigoli e con V il numero dei suoi vertici. Inoltre indichiamo con F_n il numero delle facce con n lati e con V_n il numero dei vertici da cui escono n spigoli. Infine indichiamo con $\sum \alpha$ la somma degli angoli interni delle sue facce.

1) Completare la tabella seguente:

Poliedro	F	$\Sigma\alpha$	V	$2\pi V$	$2\pi V - \sum \alpha$
Tetraedro					
Cubo					
Ottaedro					
5-prisma					
Dodecaedro					
Icosaedro					
n-prisma					
n-piramide					

2) Completare la tabella seguente

Poliedro	F	V	E	$V - E + F$
Tetraedro				
Cubo				
Ottaedro				
5-prisma				
Dodecaedro				
Icosaedro				
n-prisma				
n-piramide				

3) Si consideri (la figura di) una ciambella salvagente e si suddivida la superficie della ciambella in triangoli in modo tale che, comunque si prendano due triangoli distinti della triangolazione ottenuta, si verifichi una e una soltanto delle seguenti condizioni: (a) i due triangoli sono disgiunti (b) i due triangoli hanno in comune un solo vertice (c) i due triangoli hanno in comune 2 vertici e il lato che li connette (si noti che queste condizioni sono verificate in modo naturale se si considera un poliedro convesso con le facce suddivise in triangoli). Determinare $V - E + F$ per la triangolazione trovata.

4) Determinare in funzione di V, E, F le somme $\sum_n F_n$ e $\sum_n V_n$

5) Determinare in funzione di V, E, F le somme $\sum_n nF_n$ e $\sum_n nV_n$

6) Dimostrare che $E \geq \frac{3F}{2}$ e $E \geq \frac{3V}{2}$. La prima disuguaglianza può essere una uguaglianza? In quali casi? Analoga domanda per la seconda disuguaglianza.

7) Dato V trovare il massimo di F e il massimo di E. In quali casi questi valori massimi sono raggiunti?

8) Dato F trovare il massimo di V e il massimo di E. In quali casi questi valori massimi sono raggiunti?

9) Mostrare che non esiste un poliedro convesso con una faccia con 7 lati. Un fatto osservato da Eulero.

Bibliografia

- R. Courant, H. Robbins, revised by I. Stewart, What is Mathematics?, Oxford University Press (1996).
- I. Lakatos, Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press (1976).
- J. Malkevitch, Euler's Polyhedral Formula, Feature Column of the American Mathematical Society.
- H. Poincaré, Papers on Topology. Analysis Situs and Its Five Supplements, Translated by John Stillwell (2009)
- G. Polya, La scoperta Matematica, Volume II, Feltrinelli (1971).
- D. S. Richeson, Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology, Princeton University Press (2008).
- I. Stewart, Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo, Einaudi (2017).
- G. Ziegler, C. Blatter, Euler's polyhedron formula-a starting point of today's polytope theory, Elemente Der Mathematik (2007) 184-192.

Algebra, logica e carte di credito.

Abbiamo definito $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e le relative operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza.

Esercizio 1. Si elenchino tutti gli elementi di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e tutti gli elementi di $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, si calcolino:

a. $[2] + [1]$;
b. $[2] \cdot [2]$;
c. $[2] \cdot [2] + [2]$.

Abbiamo visto che se p è un numero primo allora, per ogni $[a] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ diverso da $[0]$, risulta $[a]^{p-1} = [1]$.

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, si calcolino:

$$[2]^0, [2]^1, [2]^2, [2]^3, [2]^4, [2]^5, [2]^6, [2]^7, [2]^8, [2]^9, [2]^{10} .$$

Abbiamo visto che se $p := 3$, $q := 11$, $m := 3 \cdot 11 = 33$, i numeri $s = 3$ e $t = 7$ hanno la proprietà che $s \cdot t - 1 = 20$ è divisibile per $p - 1 = 2$ e per $q - 1 = 10$. Dunque la coppia $(s, m) = (3, 33)$ è una chiave pubblica per cifrare con il metodo RSA e $t = 7$ è la corrispondente chiave privata.

Esercizio 4. Di ogni numero $a \in \{2, \dots, 10\}$, si calcoli la versione cifrata $[c] = [a]^3$ in $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$.

Esercizio 5. Con riferimento all'esercizio precedente, si scelga un numero cifrato $[c]$ e si verifichi che l'elevamento alla potenza $t = 7$ decifra $[c]$, ovvero che $[c]^7 = [a]$ in $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$.

Il taglia e incolla di superfici e la congettura di Poincaré.

Esercizio 1. Si determini la superficie ottenuta incollando un disco, lungo il bordo, ad ognuno dei bordi di un cilindro.

Esercizio 2. Si determinino le possibili superfici ottenute incollando due cilindri lungo i loro bordi.
Esercizio 3. Si determini la superficie ottenuta incollando un disco ed un nastro di Moebius lungo il loro bordo.

Esercizio 4. Si determini la superficie ottenuta incollando un nastro di Moebius, lungo il bordo, ad ognuno dei bordi di un cilindro.

Esercizio 5. Si determini la superficie ottenuta come somma connessa di una bottiglia di Klein e di un piano proiettivo

Bibliografia (per cominciare a curiosare, senza voler comprendere davvero tutto): MASSEY W.S., Algebraic Topology: an Introduction, Harcourt, Brace & World, New York, 1967.

Una lezione di Teoria dei Numeri.

Problema 1. Le celle di una prigione sono numerate da 1 a 100 e le loro porte sono controllate da un pulsante centrale. Quando viene premuto, il pulsante attiva alcune delle porte, aprendole se sono chiuse, chiudendole se aperte. Partendo dallo stato in cui tutte le porte sono chiuse il pulsante viene premuto 100 volte, attivando alla k-esima pressione tutte e sole le porte che sono numerate con un multiplo di k. Quali porte saranno aperte alla fine?

Problema 2. [classico] Un numero intero $n \geq 1$ si dice perfetto se la somma dei divisori positivi di n, diversi da n, è uguale a n stesso. I primi due numeri perfetti sono $6 = 1+2+3$ e $28 = 1+2+4+7+14$. Provare che un numero intero positivo pari n è perfetto se e solo se $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, dove p e $2^p - 1$ sono numeri primi.

Esercizio 1. Calcolare i valori della funzione $\tau(n)$ nei seguenti casi:

$$n = 42, \quad n = 516, \quad n = 600, \quad n = 2592$$

Esercizio 2. Dimostrare che $n = 2$ è il solo caso in cui si ha $\tau(n) = n$.

Esercizio 3. Dimostrare che $n = 6$ è il più piccolo intero positivo tale che $\tau(n) = 4$. Trovare il più piccolo intero positivo n tale che $\tau(n) = 5$, ed il più piccolo tale che $\tau(n) = 6$.

Esercizio 4. Calcolare i valori della funzione $\sigma(n)$ nei seguenti casi:

$$n = 51, \quad n = 52, \quad n = 410, \quad n = 4725.$$

Esercizio 5. Sia n un intero positivo; si dimostri che se $\sigma(n) = \sigma(100)$ allora $n = 100$.

Esercizio 6. Si verifichi che i due numeri 220 e 284 sono *amici*, ovvero

$$\begin{aligned} \sigma(220) - 220 = 284 \\ \sigma(284) - 284 = 220 \end{aligned}$$

(questa osservazione è attribuita a Pitagora).

Esercizio 7. Si provi che se n è un numero perfetto *dispari* e 3 divide n allora 9 divide n (vedremo a lezione che non si sa se esistano numeri perfetti dispari).

I prossimi esercizi sono più impegnativi (livello simil-universitario) ma la loro soluzione, benché non banale, non richiede particolari conoscenze. Se m, n sono numeri interi, la scrittura

$$m|n$$

significa che m divide n (ovvero esiste un terzo numero intero q tale che $n = qm$. Il simbolo $\prod$ (detto "produttoria") serve a condensare il prodotto di diversi fattori: ad esempio con

$$\prod_{d|n} d$$

si intende il prodotto di tutti i divisori (positivi) di n.

Esercizio 1*. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

Esercizio 2*. Si provi che per ogni $n \geq 1$,

$$\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Esercizio 3*. Si provi che per ogni $n \geq 2$,

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \prod_{p|n} \frac{p}{p-1}.$$

dove p varia nell'insieme dei divisori primi di n.

Esercizio 4*. Sia $n \in \mathbb{N}^*$; si provi che se $\sigma(n)$ è dispari, allora $n = a^2$ oppure $n = 2a^2$, per qualche $a \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 5*. Si provi che se n è un numero perfetto dispari, allora n è diviso da almeno 3 primi distinti.

Ed ora, **cose ancor più difficili**, che ho chiamato *Problemi*, poiché tratte - con qualche semplificazione - da problemi assegnati in competizioni matematiche per studenti della Scuole Superiori. Nelle soluzioni possono tornare utili alcune delle formule viste negli esercizi precedenti (se non vi riescono, direi non c'è da preoccuparsi).

Problema 1*. [Putnam competition 1969] Sia n intero positivo; provare che se $24|n$ allora $24|\sigma(n-1)$.

Problema 2*. [Bielorussia 1999] Sia n un intero positivo dispari; provare che

$$\sigma(n)^3 < n^4.$$

(SUGG. per la propietà moltiplicativa, basta provare la diseguaglianza nel caso n potenza di un numero primo.)

Problema 3*. [Stati Uniti 2008, versione semplificata] Quanti sono i divisori positivi di 21^{21} che hanno esattamente 21 divisori positivi?
(SUGG. Poiché $21 = 3 \cdot 7$, ogni divisore di 21^{21} ha una fattorizzazione in primi del tipo $3^n 7^m$, con $0 \leq n, m \leq 21 \ldots$)

Problema 4*. [IMO[1], Atene 2004, versione semplificata, ma comunque impegnativa] Provare che per ogni numero primo p ed ogni intero positivo n si ha $\tau(p^{p-1}n) \neq n$.

(SUGG. Cominciare provando che se p non divide n allora $\tau(p^{p-1}n) \neq n$.)

Problema 5*. [Romania 2002] Siano p, q due primi distinti. Si provi che esistono interi positivi n, m tali che il valore medio dei divisori di $p^n q^m$ è un numero intero.

Problema 6*. [Canada 2017] Sia f una funzione definita sui numeri interi positivi e a valori interi positivi, e tale che $f(f(n)) = \tau(n)$ per ogni $n \geq 1$. Provare che se p è un primo allora $f(p)$ è un numero primo.

Per finire, **due problemi supertosti** (che anche pochi tra i concorrenti della gara relativa hanno saputo risolvere: quindi "don't panic").

Problema 1.** [IMO, Taipei 1998] Si provi che per ogni numero intero positivo **dispari** k esiste un intero n tale che

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = k.$$

Problema 2.** [Iberoamericana, 2007] Diciamo che un intero positivo n è **atresvido** se l'insieme dei suoi divisori positivi si può ripartire in tre sottoinsiemi tali che la somma degli elementi di ciascuno è la stessa. Si dica qual è il minimo numero di divisori positivi che un numero atresvido può avere.

(L'aggettivo *atresvido* non esiste nella lingua spagnola; il termine è stato probabilmente coniato dagli autori del problema per incastro tra le parole *tres* (tre) e *atrevido* (audace, osé)).

[1] Olimpiadi Internazionali di Matematica

•