UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE
DIMAI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "ULISSE DINI"

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

_settimana matematica fiorentina

Esercizi 5 febbraio 2024

Francesco Mugelli, Federica Pelagatti: **Sometimes size is the matter**

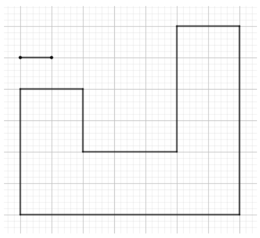
Esercizio 1. Andando a passeggio vi accorgete di essere entrati in una regione con un numero di dimensioni diverso da quello a cui siete abituati. Nessuno vuole dirvi quale sia il numero di dimensioni ma un passante vi fornisce un indizio: "per raddoppiare il volume di un solido (ipercubo, ipersfera,...) occorre aumentare le misure delle lunghezze (lato, raggio,...) di circa il 10 %."
Quante sono le dimensioni?

Esercizio 2. Sia $E = \{x \in [0,1]\ ,\ x \in \mathbb{Q}\}$ l'insieme dei numeri razionali tra 0 e 1. Quanto vale la misura di Lebesgue di E?

Esercizio 3. Dimostrare che l'insieme di Cantor ha misura 1-dimensionale uguale a zero.

Esercizio 4. Abbiamo visto che la curva di Koch (fiocco di neve) è un frattale di dimensione $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618....$ Calcolare la misura di Hausdorff H^D della curva di Koch.

Esercizio 5. Utilizzando la definizione di perimetro data da Minkowski, calcolare il perimetro del poligono E sottostante e verificare che coincide con il perimetro in senso classico.



Esercizio 6. Utilizzando la definizione di misura di Hausdorff stimare la lunghezza della linea disegnata sul foglio che vi è stato consegnato.

Stefania Bellavia: **Modelli, predizioni e ... consigli per gli acquisti**

Esercizio 1. Mediante unapparecchiatura detta spirometro si può valutare il volume daria che entra o esce dai polmoni di un individuo, e quindi il volume dossigeno inspirato. In un esperimento vengono effettuate varie misure su un soggetto in movimento.

x	0	1	2	3	4
y	19	21	20.5	21.5	22.4

dove le ascisse x rappresentano le velocità misurate in Km/h e le ordinate y la quantità di ossigeno inspirato misurato in ℓ/h.
Da considerazioni sulla natura fisica del fenomeno è noto che la quantità di ossigeno respirata dipende linearmente dalla velocità dell'individuo.

1. Si calcolino i coefficienti m e q della retta ai minimi quadrati $y = mx + q$ approssimante i dati in tabella e si disegnino i punti e la retta.

2 Utilizzando la retta ai minimi quadrati si dia una stima della quantità di ossigeno inspirato in corrispondenza di una velocità pari a $5\,Km/h$.

3 Sapendo che la quantità misurata di ossigeno per $v = 5\,Km/h$ è pari a 24 l/h si calcoli l'errore (assoluto) della stima.

Esercizio 2. La seguente tabella mostra i dati Istat della popolazione italiana negli anni 2018-2022.

x	2018	2019	2020	2021	2022
y	59.82	59.64	59.24	59.05	58.99

,

dove le ordinate y rappresentano la popolazione in milioni.

1. Si calcolino i coefficienti della parabola ai minimi quadrati $y = ax^2 + bx + c$ approssimante i dati in tabella e si disegni a parabola insieme ai punti.

2. Utilizzando la parabola ai minimi quadrati si predica il valore della popolazione nel 2023 (dato non ancora noto).

Esercizio 3. Una massa è sospesa verticalmente ad una estremità di una molla. Supponendo che la molla sia fissata allaltra estremità si vuole determinare la costante K di allungamento della molla dalle seguenti misurazioni. Ricordiamo che lo spostamento x della molla soddisfa alla legge di Hooke $F = -Kx$ dove F è la forza esercitata sulla molla.

x	2.5	5	10	17.5	22.5	30
F	0.6804	1.7690	2.9937	5.3070	7.0760	8.5275.

In tabella le ascisse x rappresentano gli allungamenti misurati in cm e le ordinate y le forze peso misurata N.
Utilizzare la retta di migliore approssimazione ai minimi quadrati dei dati in tabella per stimare la costante K.

==============================

Si ricorda che dati $(x_1, y_1), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$,

- i coefficienti della retta ai minimi quadrati $y = \mathbf{m}x + \mathbf{q}$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} n\mathbf{m} & + & (\sum_{i=1}^n x_i)\mathbf{q} & = & (\sum_{i=1}^n y_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i)\mathbf{m} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^2)\mathbf{q} & = & (\sum_{i=1}^n y_i x_i) \end{cases}$$

  dove
  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$,
  $\sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $\quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

- i coefficienti della parabola ai minimi quadrati $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} n\,\mathbf{a} & + & (\sum_{i=1}^n x_i)\mathbf{b} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^2)\mathbf{c} & = & (\sum_{i=1}^n y_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i)\mathbf{a} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^2)\mathbf{b} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^3)\mathbf{c} & = & (\sum_{i=1}^n y_i x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i^2)\mathbf{a} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^3)\mathbf{b} & + & (\sum_{i=1}^n x_i^4)\mathbf{c} & = & (\sum_{i=1}^n y_i^2 x_i). \end{cases}$$

_settimana matematica fiorentina

Esercizi 6 febbraio 2024

Gianmarco Giovannardi, Ilaria Lucardesi: **La matematica delle bolle di sapone: come ottenere risposte facili a domande difficili**

Esercizio 1. Dati 4 punti ai vertici di un rettangolo di lati 2 e 4, qual è il percorso più corto che li collega?

Esercizio 2. Il problemadi Didone che abbiamo visto stamattina consisteva nel trovare la figura piana di area massima, a perimetro fissato. Abbiamo verificato sperimentalmente che la risposta è il cerchio. In questo esercizio muoviamo i primi passi verso una dimostrazione matematica rigorosa, sfruttando la strategia dimostrativa "per assurdo". Il quesito per voi è questo:

Sapreste dimostrare che la forma ottimale è convessa?

Esercizio 3. [con Geogebra] Un modo diverso, ma equivalente, di formulare il problema di Didone è: sapreste trovare la figura piana di perimetro minimo ad area fissata? Anche qui la risposta rigorosa è molto difficile... però potete cimentarvi in una variante:

Fissati un numero reale positivo A ed un numero naturale N, qual è il poligono di area A ed N lati che ha perimetro minimo? E se lavorassimo tra i poligoni di area A fissata senza il vincolo sul numero N di lati?

Lucia Sanus: **La sequenza di Fibonacci e la sezione aurea**

Esercizio 1. Dimostra per induzione che per ogni $n \geq 1$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Esercizio 2.

1. Scrivi i primi 10 numeri di Fibonacci.
2. Sapresti dire quanto è $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} =$? Dimostra per induzione la tua congettura.

Esercizio 3.

1. Calcola $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dove $\lfloor x \rfloor$ indica il numero intero più grande, minore o uguale a x.
2. C'è qualche relazione tra ciò che hai ottenuto in (1.) e la successione di Fibonacci?

Esercizio 4. Un gruppo di amici, composto da numerosi matematici e non matematici, si riunisce ad una festa. Ad un certo punto, un numero di n partecipanti si siederà su n sedie consecutive. L'organizzatore dell'evento non vuole che due matematici siano seduti uno accanto all'altro perché parlerebbero di lavoro per tutta la serata.

Chiamiamo S_n il numero di modi per disporre n persone su queste n sedie con la suddetta restrizione. Nel determinare i primi valori di n e S_n, assumiamo che $\square$ rappresenti un non matematico e $\blacksquare$ rappresenti un matematico.

a: Completa la tabella

n	Possibilità	S_n
1	$\square$ $\blacksquare$	2
2	$\square\ \square$ $\square\ \blacksquare$ $\blacksquare\ \square$	3
3		
4		
5		

b: Scrivi in modo ricorsivo S_n.

— RICORDA: —

Numero combinatorio. Il numero combinatorio $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di modi in cui è possibile scegliere k elementi da un insieme di n elementi, senza considerare l'ordine di selezione. La formula generale per il numero combinatorio è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove $n!$ rappresenta il fattoriale di n, che è il prodotto di tutti i numeri interi positivi da 1 a n. La notazione $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

Ad esempio, $\binom{5}{2}$ rappresenta il numero di modi in cui è possibile selezionare 2 elementi da un insieme di 5 elementi, ed è calcolato come:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Quindi, ci sono 10 modi per selezionare 2 elementi da un insieme di 5 elementi.

Il triangolo di Pascal è:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Esercizi 7 febbraio 2024

Nella Rotundo e Lucia Sanus: **La signora degli anelli**

Esercizio 1. Consideriamo l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine 2×2

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ per ogni } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Date due matrici appartenenti a questo insieme

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

definiamo in $\mathbb{M}$ due operazioni:

$$\textbf{somma } + \quad A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

e il

$$\textbf{prodotto } * \quad A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot d_2 \\ c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo inoltre il sottoinsieme di $\mathbb{M}$ che chiameremo $\mathbb{M}_1$ dato dalle matrici del tipo

$$\mathbb{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

ed un altro sottoinsieme $\mathbb{M}_1^{\#}$ dato dalle matrici del tipo

$$\mathbb{M}_1^{\#} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

1. Dimostrate che la struttura algebrica $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano.
2. La struttura algebrica $(\mathbb{M}, *)$ è un gruppo?
3. Trovate un controesempio per dimostrare che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}$ non è commutativa.
4. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, +)$ è un gruppo abeliano? Perché?
5. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, *)$ è un gruppo? Perché?
6. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un gruppo? Perché?
7. Dimostrate che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}_1$ è commutativa.
8. Il gruppo $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, *)$? e Il gruppo $(\mathbb{M}_1, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, +)$
9. $(\mathbb{M}, +, *)$ è un anello?
10. $(\mathbb{M}_1, +, *)$ è un anello?

— RICORDA: —

Definizione di Gruppo : Affinchè un insieme $\mathbb{G}$ ed una operazione " $\circ$ " costituiscano la struttura di gruppo abeliano devono verificarsi le seguenti proprietà

a) Per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{G}$ deve aversi che $a \circ b \in \mathbb{G}$ (l'insieme è chiuso rispetto all'operazione)

b) Vale la proprità associativa, $\forall a, b, c$ si ha che $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

c) Esiste l'elemento neutro $e \in \mathbb{G}$ tale che $a \circ e = e \circ a = a$

d) Esiste l'elemento inverso per ogni elemento $a \in \mathbb{G}$, cioè esiste $a' \in \mathbb{G}$ tale che $a \circ a' = a' \circ a = e$

e) Per essere abeliano deve essere verificata anche la proprietà commutativa, per ogni $a \circ b = b \circ a$, $\forall a, b \in \mathbb{G}$.

Esercizio 2. Dimostrate che la struttura algebrica $(\mathbb{M}, +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 3. La struttura algebrica $(\mathbb{M}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 4. Trovare un controesempio per dimostrare che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}$ non è commutativa.

Esercizio 5. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, +)$ è un gruppo abeliano? Perché?

Esercizio 6. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1, *)$ è un gruppo? Perché?

Esercizio 7. La struttura algebrica $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un gruppo? Perché?

Esercizio 8. Dimostrate che l'operazione * sull'insieme $\mathbb{M}_1$ è commutativa.

Esercizio 9. Il gruppo $(\mathbb{M}_1^{\#}, *)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, *)$? e Il gruppo $(\mathbb{M}_1, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{M}, +)$

— RICORDA: —

La struttura algebrica dotata di due operazioni $(\mathbb{A}, +, *)$ è un **anello** se sono soddisfatte le seguenti propietà:

a) $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano

b) $a * (b * c) = (a * b) * c$ per ogni $a, b, c, \in \mathbb{A}$ (associatività del prodotto)

c) esiste $e \in \mathbb{A}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{A}$, $a * e = a = e * a$ (elemento neutro per il prodotto)

d) Valgono le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma, ovvero, per ogni $a, b, c \in \mathbb{A}$:

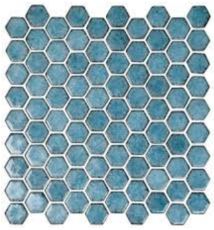
$$a * (b + c) = a * b + a * c \qquad \text{e} \qquad (b + c) * a = b * a + c * a.$$

Esercizio 10: $(\mathbb{M}, +, *)$ è un anello?

Esercizio 11. $(\mathbb{M}_1, +, *)$ è un anello?

Esercizio: determinare il gruppo delle simmetrie delle seguenti figure:

(a) 

(b) 
da considerarsi infinito in tutte le direzioni